PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

L'usage des calculatrices programmables et alphanumériques est autorisé sous réserve des dispositions définies dans la circulaire n°86-228 du 28 juillet 1986.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à écrire lisiblement, à mettre en évidence les principaux résultats et à donner des démonstrations claires et concises. Les principaux théorèmes utilisés devront être clairement énoncés

Les candidats pourront admettre les résultats d'une question (ou d'une partie) non résolue pour traiter les questions suivantes.
Les différentes parties du problème sont dans une assez large mesure indépendantes.

PARTIE I

Soit, pour x réel et n entier naturel, les termes généraux des séries de fonctions :

$$u_n(x) = \frac{(-1)^n}{(2n+1)^x} \quad \text{et} \quad v_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^x} \ln(2n+1)$$

On note f et g respectivement les sommes des séries : $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x)$.

1) Etudier le domaine de définition de la fonction f, en précisant le domaine d'absolue convergence de la série qui définit cette fonction.

2) Soit a un réel strictement positif, montrer que la convergence de la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ est uniforme sur $[1+a, +\infty[$. Qu'en déduit-on pour la fonction f?

3) Soit b un réel strictement compris entre 0 et 1, étudier si la convergence de la série de fonctions de terme général $u_n(x)$ est uniforme sur $[b, 1+a]$.

4) Etudier de la même façon le domaine de définition de la fonction g et déterminer les intervalles où la convergence est uniforme.
Déduire des calculs précédents un domaine où f est dérivable et y donner une expression de f'.

PARTIE II

1) Etudier l'existence d'une limite pour f quand x tend vers plus l'infini.

2) Calculer f(1) en remarquant que : $\frac{1}{2n+1} = \int_0^1 t^{2n}\,dt$.

(On pourra écrire : $f(1) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{n=N} u_n(1)$).

3) Déterminer les valeurs approchées à 10^{-4} près de f(3) et de f(5) et une valeur approchée de f(1/2) à 10^{-1} près.
(On indiquera dans chacun des cas le nombre de termes de la série calculés.)

4) Pour x supérieur ou égal à 1, déterminer les variations de f. Donner l'allure de la courbe représentative de f.

PARTIE III

Soit $F_t(x)$ la fonction impaire, 2π périodique définie par les relations :
$F_t(0) = F_t(\pi) = 0$ et $F_t(x) = \mathrm{ch}(tx)$ pour x dans $]0, \pi[$.

1) Déterminer les coefficients de Fourier $a_0/2$, a_n, b_n pour n dans N^* de F_t.

2) Préciser pour x dans $[0, \pi]$ la somme de la série de Fourier.

3) En déduire pour $x = \pi/2$, une expression de $1/\mathrm{ch}(\pi t/2)$ sous forme de série.

4) Justifier les égalités :

$$\frac{1}{\mathrm{ch}\,t} = 2\sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)t} \quad \text{pour } t \text{ dans }]0, +\infty[\quad \text{et}$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}\,t} = 2\sum_{k=0}^{k=N} (-1)^k e^{-(2k+1)t} + 2(-1)^{N+1} \frac{e^{-(2N+3)t}}{1+e^{-2t}} \quad \text{pour } t \text{ dans }]0, +\infty[$$

Tournez la page S. V. P.

5) Etudier la convergence de $\int_0^{\infty} \frac{\cos(x\,t)}{\mathrm{ch}\,t}\,dt = G(x)$ et calculer les intégrales I_k

$$\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t}\cos(x\,t)\,dt = I_k \ .$$

(k entier naturel).

6)En multipliant par cos (xt)le développement en série du 4) et en utilisant également l'autre égalité , montrer que l'on peut intégrer terme à terme la série obtenue entre 0 et $+\infty$. Donner une expression de G(x) sous forme de série et en déduire la valeur de G (x) .

PARTIE IV

On donne $\frac{1}{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{2}x\right)} = \frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\frac{2p+1}{(2p+1)^2+x^2} = g(x)$ pour x dans R.

1) Montrer que $\frac{\pi}{4}g(x) = \sum_{p=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+p}x^{2n}}{(2p+1)^{2n+1}}\right)$

pour les réels x strictement inférieurs à 1 en module . ($\forall x \in R \quad |x| < 1$).

2) On admet qu'il est légitime de permuter l'ordre des deux sommations par rapport aux indices p et n .

En déduire que : $\forall x, |x|<1$, $\frac{\pi}{4}g(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n T_n x^{2n}$ avec $T_n = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^{2n+1}} = \beta(2n+1)$

3) Déterminer alors les valeurs exactes de f(3) et de f(5) .

4) Montrer que pour tout n de N , $f(2n+1) = \pi^{2n+1} q_n$, où q_n est un rationnel

PARTIE V

1) Etudier la convergence des intégrales J_k .

$$J_k = \int_0^{+\infty} \frac{t^{2k}}{\mathrm{ch}\,t}\,dt$$

2) Appliquer l'inégalité de Taylor à la fonction y ---> cos(y) à l'ordre 2N+2 .

En déduire que :

$$G(x) = \sum_{n=0}^{n=N}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2n}}{\mathrm{ch}\,t}\,dt + R_N(x) \quad \text{avec } |R_N(x)| \le \frac{|x|^{2N+2}}{(2N+2)!}\int_0^{+\infty}\frac{t^{2N+2}}{\mathrm{ch}\,t}\,dt .$$

3) Justifier l'inégalité : $\mathrm{ch}\,t \ge \frac{t^{2N+4}}{(2N+4)!} \quad \forall t \ge 1$.

En déduire : $\forall x, |x|<1 \quad \lim_{N\to+\infty}|R_N(x)| = 0$. Soit donc $G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}J_k$ pour $|x|<1$

4) Déterminer en fonctions des données du problème la valeur des intégrales J_k .

5) Donner le rayon de convergence de la série entière obtenue en 3) .

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail